



## نقشه برداری ژئودتیک (دیتوم شبکه های نقشه برداری)

سمیع سمیعی اصفهانی



دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

## مروری از مدل ریاضی شبکه و برآورد کمترین مربعات :

یا در مدل های غیر خطی \*

$$\Delta y_0 \approx J_{x_0} \Delta x_0$$

\* در ادامه بحث به منظور ساده سازی، ما تمامی مفاهیم را فقط برای حالت خطی می نویسیم، اما توجه داشته باشید که این مفاهیم برای حالت غیر خطی هم به راحتی به کار می روند (فقط جای ماتریس A با J عوض می شود)

مدل تابعی

$$E\{\underline{y}\} = A\underline{x}$$

Functional model

مدل آماری

$$D\{\underline{y}\} = Q_{yy}$$

Stochastic model

Mathematical model

مدل ریاضی

برآوردگر کمترین مربعات یا BLUE

$$\hat{\underline{x}} = (A^T Q_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{yy}^{-1} \underline{y}$$

$$Q_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} = (A^T Q_{yy}^{-1} A)^{-1}$$

دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی



## شرط وجود جواب کمترین مربعات

$$\hat{\underline{x}} = (A^T Q_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{yy}^{-1} \underline{y}$$

**سوال: در چه شرایطی می توانیم برآورد کمترین مربعات را محاسبه کنیم؟**

برای محاسبه برآورد از طریق رابطه بالا، ماتریس نرمال (یعنی  $N = A^T Q_{yy}^{-1} A$ ) باید معکوس پذیر باشد.

**سوال: در چه شرایطی ماتریس نرمال معکوس پذیر است؟**



## میان پرده: مروری بر مفاهیم جبر خطی فضای پوچی Null Space

**فضای پوچی** ماتریس  $A$  با ابعاد  $m \times n$  را با  $\mathcal{N}(A)$  نشان می دهیم که فضایی است در  $\mathbb{R}^n$  که شامل بردارهای  $x$  است که  $Ax=0$  می شود.

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

اگر فضای پوچی ماتریسی تهی نباشد  $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$ ، یعنی می توان ترکیب خطی از ستون های  $A$  پیدا کرد که معادل صفر می شود. پس در این حالت ستون های  $A$  به هم وابسته هستند.



## میان پرده: مروری بر مفاهیم جبر خطی معکوس پذیری ماتریس ها

ماتریس مربعی  $B$  با اندازه  $n \times n$ ، **معکوس پذیر** (یا **نامنفرد**) است اگر دارای ستون های مستقل باشد، یا به عبارتی اگر مرتبه آن برابر  $n$  باشد یا فضای پوچی آن تهی باشد.

$$\text{rank}\{B\} = n$$

$$\mathcal{N}(B) = 0$$

در صورتی که یک ماتریس مربعی دارای کمبود مرتبه باشد ( $\text{rank}(A) < n$ ) آن **ماتریس منفرد** است و معکوس پذیر نیست.



## شرط وجود جواب کمترین مربعات

$$\hat{\underline{x}} = (A^T Q_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{yy}^{-1} \underline{y}$$

**سوال: در چه شرایطی می توانیم برآورد کمترین مربعات را محاسبه کنیم؟**

برای محاسبه برآورد از طریق رابطه بالا، ماتریس نرمال (یعنی  $N = A^T Q_{yy}^{-1} A$ ) باید معکوس پذیر باشد.

**سوال: در چه شرایطی ماتریس نرمال معکوس پذیر است؟**

پس می توان گفت که کمترین مربعات وقتی جواب دارد که ماتریس نرمال  $N = A^T Q_{yy}^{-1} A$  دارای ستون های مستقل باشد و مرتبه آن برابر با  $n$  یا تعداد مجهولات مسئله باشد.

می توان ثابت نمود که ماتریس نرمال دارای مرتبه  $n$  و معکوس پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس  $A$  دارای کمبود مرتبه نباشد و مرتبه آن برابر  $n$  باشد (یا به عبارتی ماتریس  $A$  دارای ستون های مستقل باشد)



## کمبود مرتبه و نقص در شبکه

$$\hat{\underline{x}} = (A^T Q_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{yy}^{-1} \underline{y}$$

پس تا اینجا کار نتیجه گرفتیم که شرط وجود جواب کمترین مربعات، عدم کمبود مرتبه در ماتریس طرح A است. در شبکه‌های نقشه برداری، وقتی ماتریس طرح دارای کمبود مرتبه است می‌گوییم **شبکه دارای نقص** است.

**سوال: در یک شبکه نقشه برداری چه عواملی می‌تواند باعث نقص شبکه و یا کمبود مرتبه در ماتریس طرح گردد؟**



## نقص در شبکه

**سوال: در یک شبکه نقشه برداری چه عواملی می‌تواند باعث نقص شبکه و یا کمبود مرتبه در ماتریس طرح گردد؟**

به طور کلی میتوان گفت وقتی ماتریس طرح دارای کمبود مرتبه است یعنی اینکه ما برای برآورد مجهولات شبکه اطلاعات کافی نداریم. این **کمبود اطلاعات** می‌تواند از دو نوع باشد:

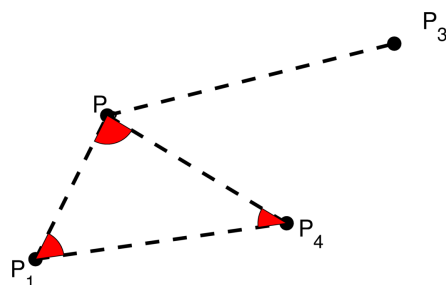
۱- اطلاعات ما در مورد سیستم مختصات شبکه ناقص است : **نقص دیتوم**

۲- یا کمبود اطلاعات ما ربطی به تعریف سیستم مختصات ندارد، و در این حالت ساختار شبکه و مشاهدات برای برآورد تمامی مجهولات کافی نیست : **نقص شکل شبکه**



## نقص در شبکه: مثال

شبکه مسطحاتی (۲ بعدی) زیر را در نظر بگیرید. مختصات هر چهار نقطه مجهول است (در مجموع ۸ مجهول). فواصل مشخص شده با خط چین و زوایای قرمز رنگ مشاهده شده اند.



بدون هیچ اطلاعات دیگری، نمیتوان مختصات این چهار نقطه را بدست آورد. دلیل اول این است که سیستم مختصات نامشخص است. یعنی نمیتوانیم صفر محورهای مختصات بچاسیم. یا نمی دانیم امتداد محورهای مختصات در چه جهتی هستند. این عدم تعریف سیستم مختصات را **نقص دیتوم شبکه** می نامیم.

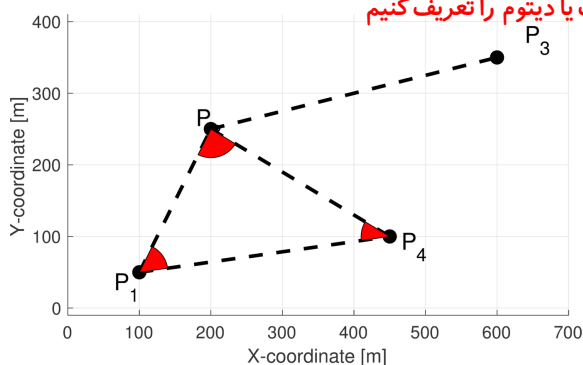
برای رفع نقص دیتوم باید سیستم مختصات یا **دیتوم شبکه** را مشخص کنیم

مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

## نقص در شبکه: مثال

شبکه مسطحاتی (۲ بعدی) زیر را در نظر بگیرید. مختصات هر چهار نقطه مجهول است (در مجموع ۸ مجهول). فواصل مشخص شده با خط چین و زوایای قرمز رنگ مشاهده شده اند.

حال فرض کنید سیستم مختصات یا دیتوم را تعریف کنیم



همچنان اطلاعات کافی برای تعیین و برآورد مختصات نقطه P3 نداریم (**نقص شکل**)

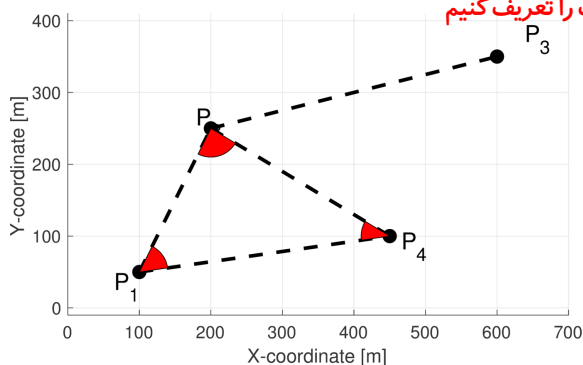
دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی



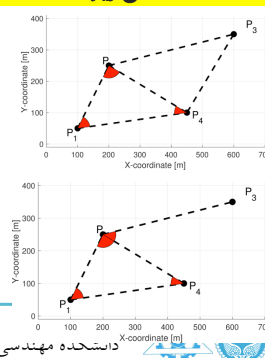
## نقص در شبکه: مثال

شبکه مسطحاتی (۲ بعدی) زیر را در نظر بگیرید. مختصات هر چهار نقطه مجهول است (در مجموع ۸ مجهول). فواصل مشخص شده با خط چین و زوایای قرمز رنگ مشاهده شده اند.

حال فرض کنید سیستم مختصات را تعریف کنیم



برای رفع نقص شکل نیاز به مشاهدات دیگری است. مثلاً حالت های زیر:



دستگاه مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

## هدف از بحث دیتوم شبکه های نقشه برداری

**تعریف دیتوم:** دیتوم یک شبکه شامل مجموعه پارامترهایی است که تعریف کننده سیستم مختصات آن شبکه می باشد. پارامترهایی که مبدا سیستم مختصات، جهت قرارگیری محورهای آن و مقیاس آن را تعریف می کند.

موضوع اصلی درس این هفته بحث **نقص دیتوم** و نحوه رفع آن با **تعیین دیتوم** مناسب برای شبکه های نقشه برداری می باشد.

به عبارتی اینکه تشخیص دهیم که شبکه چه نقص یا نقص های دیتومی دارد. و چگونه باید دیتوم مورد نیاز برای شبکه را از لحاظ ریاضی تعریف کنیم و در معادلات برآورد کمترین مربعات وارد کنیم.



## پارامترهای کلی دیتوم در شبکه‌های ۱ بعدی

سیستم مختصات یا دیتوم به طور کلی در شبکه‌های **یک بعدی** با چند پارامتر تعریف می‌شوند؟

۱- در شبکه‌های یک بعدی به طور کلی نیاز به تعریف سه پارامتر یعنی مبدا، جهت محور مختصات و مقیاس آن است.

اما در شبکه‌های یک بعدی **ارتفاعی (ترازیابی)** از آنجایی که جهت محور مختصات از قبل در ذات مسئله تعریف شده است (یعنی جهت عمودی) و همچنین مقیاس اندازه‌گیری‌های ارتفاع مشخص است (مثلاً بر مبنای متر یا سانتیمتر)، برای تعریف دیتوم فقط نیاز به **تعریف مبدا** مختصات (یعنی فقط یک پارامتر) داریم.



## پارامترهای کلی دیتوم در شبکه‌های ۲ بعدی

سیستم مختصات یا دیتوم به طور کلی در شبکه‌های **دو بعدی** با چند پارامتر تعریف می‌شوند؟

۲- در شبکه‌های دو بعدی (مسطحاتی) نیاز به تعریف **دو پارامتر برای مختصات** دو بعدی نقطه مبدا، **یک پارامتر برای توجیه** یا جهت قرارگیری محورهای مختصات و **یک پارامتر مقیاس** می‌باشد. بنابراین در مجموع برای تعریف دیتوم نیاز به چهار پارامتر است.

**مهم:** توجه کنید که اگر در یک شبکه مسطحی از مشاهدات فاصله استفاده شود، آن مشاهدات خود مقیاس شبکه را تعریف می‌کنند و نیاز به تعریف مجدد آنها نیست. همچنین اگر در یک شبکه مسطحی، آزیموت (یا زاویه نسبت به شمال) یک یا چند امتداد اندازه‌گیری شده باشند، محورهای مختصات خودبخود توجیه می‌شوند و نیاز به تعریف دوباره ندارند.



### پارامترهای کلی دیتوم در شبکه‌های ۳ بعدی

سیستم مختصات یا دیتوم به طور کلی در شبکه‌های **سه بعدی** با چند پارامتر تعریف می‌شوند؟

۳- در شبکه‌های سه بعدی نیاز به تعریف **سه پارامتر برای مختصات سه بعدی** نقطه مبدأ، **سه پارامتر برای توجیه** یا جهت قرارگیری محورهای مختصات و **یک پارامتر مقیاس** می‌باشد. بنابراین در مجموع برای تعریف دیتوم نیاز به هفت پارامتر است.



### نقص دیتوم : Datum-Defect یا d-defect

همانطور که گفتیم نقص دیتوم و نقص شکل باعث می‌شود که ماتریس طرح دارای کمبود مرتبه شود. اختلاف تعداد ستون‌های ماتریس طرح و مرتبه ماتریس مشخص کننده تعداد نقص می‌باشد.

$$d.\text{defect} + c.\text{defect} = n - \text{rank}(A)$$

در صورتی که نقص شکل نداشته باشیم (که معمولاً نداریم):  $c.\text{defect} = 0$

پس در این صورت تعداد نقص دیتوم اینگونه تعریف می‌گردد:

$$d = d.\text{defect} = n - \text{rank}(A)$$

بنابراین برای حل مسئله ای با **d** تعداد نقص دیتوم، نیاز به تعریف حداقل **d** تعداد پارامتر یا قید دیتوم است. از نظر ریاضی معرفی هر قید دیتوم معادل با اضافه کردن یک معادله-مشاهده به مدل ریاضی شبکه می‌باشد. حل مسئله کمترین مربعات با اضافه کردن کمترین قیود دیتوم لازم (یعنی d) را روش **حداقل قیود یا Minimum Constraints** می‌نامند.



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های یک بعدی

در شبکه‌های یک بعدی ترازبایی که فقط به یک قید دیتوم (یعنی مبدا محور ارتفاعی) احتیاج داریم، معمولاً ارتفاع یکی از نقاط شبکه معلوم و برابر با صفر قرار داده می‌شود. مثلاً می‌خواهیم ارتفاع نقطه  $i$  ام را برابر با صفر قرار دهیم

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مولفه  $i$  ام

ماتریس دیتوم  $D = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \textcircled{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  مولفه  $i$  ام

مدل تابعی با کمترین قیود

$$\begin{aligned} y &= Ax + e \\ 0 &= D^T x \end{aligned}$$

درجه آزادی یا افزونگی مدل  $df = m - \text{rank}(A) = m - n + d$



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های یک بعدی

**مثال:** فرض کنید در یک شبکه ارتفاعی دارای ۵ نقطه، می‌خواهیم میانگین ارتفاع نقطه اول و چهارم را به عنوان صفر ارتفاعی (دیتوم) معرفی کنیم. ماتریس دیتوم و قید لازم برای اضافه شدن به مدل ریاضی را تشکیل دهید.

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

دو قید بالا با هم برابر هستند. اگر میانگین ارتفاع دو نقطه برابر با صفر است، پس مجموع ارتفاع آن دو نیز صفر است.

ماتریس دیتوم  $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

قید لازم  $0 = D^T x$



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

در شبکه‌های مسطحاتی از حالت‌های مختلفی میتوان استفاده کرد.  
برای رفع نقص دیتوم مربوط به مبدأ مختصات میتوان مختصات یک نقطه را ثابت و معادل با مقدار اولیه آن در نظر گرفت **(دو معادله قید)**.

برای رفع نقص مربوط به توجیه شبکه، می‌توان آزیموت یا ژیزمان یکی از امتدادهای شبکه را ثابت و برابر با یک مقدار مشخص در نظر گرفت **(یک معادله قید)**.

برای رفع نقص مربوط به مقیاس، می‌توان فاصله دو نقطه از هم را ثابت و برابر با یک مقدار مشخص در نظر گرفت **(یک معادله قید)**.

راه دیگر برای رفع نقص از هر ۴ نقص دیتوم این است که مختصات دو نقطه را ثابت و برابر با مقدار اولیه آن در نظر گرفت **(چهار معادله قید)**.



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

مثال : یک شبکه مسطحاتی شامل ۴ نقطه را در نظر بگیرید. فاصله بین تمامی نقاط با یکدیگر اندازه‌گیری شده‌اند. همچنین تمامی زوایای داخلی شبکه و هینطور آزیموت امتداد نقطه اول به نقطه دوم اندازه‌گیری شده‌اند. این شبکه دارای چند نقص دیتوم می‌باشد. جهت رفع نقص دیتوم، ماتریس دیتوم و حداقل قیود لازم را برای حل مسئله تشکیل دهید.



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

مثال: یک شبکه مسطحاتی شامل ۴ نقطه را در نظر بگیرید. فاصله بین تمامی نقاط با یکدیگر اندازه‌گیری شده‌اند. همچنین تمامی زوایای داخلی شبکه و هینطور آزیموت امتداد نقطه اول به نقطه دوم اندازه‌گیری شده‌اند. این شبکه دارای چند نقص دیتوم می‌باشد. جهت رفع نقص دیتوم، ماتریس دیتوم و حداقل قیود لازم را برای حل مسئله تشکیل دهید.

جواب: چون آزیموت یک امتداد خوانده شده است، پس شبکه دارای نقص توجیه نمی‌باشد. همچنین به دلیل اندازه‌گیری فواصل، مقیاس شبکه توسط اندازه‌گیری‌های فاصله تعریف می‌گردد. پس فقط نیاز به تعریف مبدا سیستم مختصات دو بعدی می‌باشد (تعداد نقص = ۲).

ادامه در اسلاید بعدی .....



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

ادامه جواب: مثلاً می‌توانیم مختصات نقطه سوم را ثابت و برابر با مقادیر معلوم ۱۰۰ و ۲۰۰ در نظر بگیریم. توجه کنید که در شبکه‌های مسطحاتی ما با مدل غیر خطی سرو کار داریم و بردار مجهولات معادل اختلاف مختصات با مقادیر اولیه می‌باشد. پس قید های دیتوم باید یک معادله خطی نسبت به مجهولات (یعنی اختلاف مختصات‌ها) باشد. پس مقادیر اولیه را برای مختصات نقطه سوم ۱۰۰ و ۲۰۰ در نظر میگیریم و اختلاف مختصات از این مقادیر را برابر با صفر.

مدل تابعی دارای کمبود مرتبه  $\Delta y \approx J_{x_0} \Delta x$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = D^T \Delta x \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس دیتوم

حداقل قیود لازم (۲ قید)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

مثال دوم: یک شبکه مسطحاتی شامل ۴ نقطه را در نظر بگیرید. فقط تمامی زوایای داخلی شبکه اندازه‌گیری شده‌اند. این شبکه دارای چند نقص دیتوم می‌باشد. جهت رفع نقص دیتوم، ماتریس دیتوم و حداقل قیود لازم را برای حل مسئله تشکیل دهید.



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

مثال دوم: یک شبکه مسطحاتی شامل ۴ نقطه را در نظر بگیرید. فقط تمامی زوایای داخلی شبکه اندازه‌گیری شده‌اند. این شبکه دارای چند نقص دیتوم می‌باشد. جهت رفع نقص دیتوم، ماتریس دیتوم و حداقل قیود لازم را برای حل مسئله تشکیل دهید.

جواب: این شبکه دارای هر ۴ نقص دیتوم شبکه‌های مسطحاتی می‌باشد. یعنی ماتریس دیتوم آن باید ۴ ستون داشته باشد معادل با ۴ حداقل قیودی که به مسئله اضافه می‌گردد. دو قید اول که همانند مثال قابل تعریف می‌گردد.

برای قیود سوم و چهارم، میتوانیم به دو شیوه عمل کنیم:

- (۱) مختصات یک نقطه دیگر را نیز (مثلاً نقطه اول را) ثابت و برابر با مقدار تقریبی آن بگیریم
- (۲) آزمون یک امتداد و فاصله بین یک جفت از نقاط را ثابت و برابر با مقادیر معلوم قرار دهیم

ادامه در صفحه بعدی .....



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

ادامه جواب مثال ۲: در روش اول معادلات قید به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = D^T \Delta x$$

مربوط به نقطه اول  
مربوط به نقطه سوم

حداقل قیود لازم (۴ قید)

ادامه در صفحه بعدی .....



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

ادامه جواب مثال ۲: در روش دوم باید دو قید اضافه کنیم. یکی آزیموت یک امتداد و دومی فاصله بین دو نقطه. اول فرض کنید می‌خواهیم آزیموت امتداد نقطه دوم به سوم را ثابت و برابر با مقدار ثابت ۳۰ درجه در نظر بگیریم.

$$a_{23} = 30^\circ = \arctan\left(\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}\right)$$

با خطی سازی معادله داریم:

$$\Delta a_{23} = -\frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} \Delta x_2 + \frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} \Delta y_2 + \frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} \Delta x_3 - \frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} \Delta y_3$$

و چون می‌خواهیم تغییرات آن را نسبت به مقدار ۳۰ درجه برابر با صفر بگیریم، داریم

$$\Delta a_{23} = a_{23} - a_{023} = 30^\circ - 30^\circ = 0$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} & \frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} & \frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} & -\frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = D^T \Delta x$$

قید سوم  
(توجیه محورهای مختصات)

ادامه در صفحه بعدی .....



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

ادامه جواب مثال ۲: برای قید فاصله مقیاس، باید فاصله یک امتداد را برابر یک مقدار ثابت فرض کنیم. مثلاً اگر فاصله بین نقطه اول و دوم را برابر با ۵۰۰ متر فرض کنیم

$$l_{12} = 500 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

با خطی سازی معادله داریم:

$$\Delta l_{12} = -\frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} \Delta x_1 - \frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} \Delta y_1 + \frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} \Delta x_2 + \frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} \Delta y_2$$

و چون می‌خواهیم تغییرات آن را نسبت به مقدار ۵۰۰ متر برابر با صفر بگیریم، داریم

$$\Delta l_{12} = l_{12} - l_{0_{12}} = 500 - 500 = 0$$

$$0 = \begin{bmatrix} -\frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} & -\frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} & \frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} & \frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = D^T \Delta x$$

قید سوم  
(مقیاس محورهای مختصات)

ادامه در صفحه بعدی .....



### حداقل قیود لازم در شبکه‌های نقشه‌برداری شیوه‌های معمول در شبکه‌های دو بعدی

ادامه جواب مثال ۲: در مجموع تمامی چهار قید کنار هم قرار می‌گیرد و ماتریس دیتوم را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} & \frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} & \frac{y_3^o - y_2^o}{(l_{23}^o)^2} & -\frac{x_3^o - x_2^o}{(l_{23}^o)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} & -\frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} & \frac{x_2^o - x_1^o}{(l_{12}^o)^2} & \frac{y_2^o - y_1^o}{(l_{12}^o)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = D^T \Delta x$$

دو معادله اول مربوط به ثابت گرفتن مختصات نقطه سوم (قید مبدا محورهای مختصات)  
معادله سوم مربوط به ثابت گرفتن امتداد نقطه دوم به سوم (قید چرخش یا توجیه)  
معادله چهارم مربوط به ثابت گرفتن فاصله بین نقاط اول و دوم (قید مقیاس)



### حداقل قیود لازم و محتوای دیتومی مشاهدات:

تا اینجا دیدیم که برای رفع این نقص، باید دیتوم شبکه به صورت معادلات ریاضی فرموله شود و به عنوان قید به مدل تابعی مسئله (دستگاه معادلات-مشاهدات) اضافه گردد. تعداد نقص دیتوم بستگی به چند بعدی بودن شبکه و همچنین مشاهدات موجود در شبکه دارد (دو اسلاید بعدی).



### قیود لازم برای شبکه‌های یک، دو، و سه بعدی

| قیود مورد احتیاج                  | انتقال (تعریف مبدا) |       |       | دوران (توجیه سیستم مختصات) |       |       | مقیاس |
|-----------------------------------|---------------------|-------|-------|----------------------------|-------|-------|-------|
|                                   | $t_x$               | $t_y$ | $t_z$ | $w_x$                      | $w_y$ | $w_z$ |       |
| شبکه ۱-بعدی<br>(ترازیابی/ارتفاعی) | -                   | -     | ✓     | -                          | -     | -     | ✓     |
| شبکه ۲-بعدی<br>(مسطحاتی)          | ✓                   | ✓     | -     | -                          | -     | ✓     | ✓     |
| شبکه ۳-بعدی                       | ✓                   | ✓     | ✓     | ✓                          | ✓     | ✓     | ✓     |

توجه کنید که این جدول بیان کننده قیود لازم در حالت کلی است. بسته به نوع مشاهدات موجود در شبکه، شاید نیازی به بعضی از قیود جدول بالا نباشد. مثلاً در شبکه‌های ترازیبی چون اختلاف ارتفاع مشاهده می‌شود، مقیاس شبکه خود بخود توسط مشاهدات تعریف می‌شوند، پس نیازی به قید مقیاس نیست.

**محتوای دیتوم برای مشاهدات مختلف در جدول اسلاید بعدی آورده شده است.**



### محتوای دیتومی مشاهدات یا شبه مشاهدات (قیود)

| مقیاس                 | انتقال (تعریف مبدا) |       |       | دوران (توجیه سیستم مختصات) |       |       | S |
|-----------------------|---------------------|-------|-------|----------------------------|-------|-------|---|
|                       | $t_x$               | $t_y$ | $t_z$ | $w_x$                      | $w_y$ | $w_z$ |   |
| فاصله (شیب دار)       | -                   | -     | -     | -                          | -     | -     | ✓ |
| فاصله مسطحاتی         | -                   | -     | -     | ✓                          | ✓     | -     | ✓ |
| زاویه مسطحاتی         | -                   | -     | -     | ✓                          | ✓     | -     | - |
| آزیموت/ژیرومان        | -                   | -     | -     | ✓                          | ✓     | ✓     | - |
| اختلاف ارتفاع         | -                   | -     | -     | ✓                          | ✓     | -     | ✓ |
| مختصات ۳ بعدی یک نقطه | ✓                   | ✓     | ✓     | -                          | -     | -     | - |
| مختصات ۳ بعدی دو نقطه | ✓                   | ✓     | ✓     | ✓                          | ✓     | ✓     | ✓ |
| ارتفاع یک نقطه        | -                   | -     | ✓     | -                          | -     | -     | - |
| مختصات مسطحاتی ۱ نقطه | ✓                   | ✓     | -     | -                          | -     | -     | - |



### حل مسئله کمترین مربعات با قید دیتوم

تا اینجای کار یاد گرفتیم که چگونه به منظور رفع نقص دیتوم، چگونه قیود دیتوم و ماتریس دیتوم را تشکیل دهیم و دستگاه معادلات-مشاهدات را با استفاده از این قیود تکمیل کنیم.

مدل تابعی با کمترین قیود

$$\begin{aligned} y &= Ax + e \\ 0 &= D^T x \end{aligned}$$

درجه آزادی یا  
افزونگی مدل  $df = m - \text{rank}(A) = m - n + d$

حال برای حل این مسئله نیاز به حل کمینه سازی کمترین مربعات با در نظر گرفتن قید دیتوم داریم:

$$\hat{x} = \arg \min_x \|y - Ax\|_{Q_y}^2 \quad \text{subject to: } D^T x = 0 \quad (\text{به شرط})$$



### حل مسئله کمترین مربعات با قید دیتوم

$$\hat{x} = \arg \min_x \|y - Ax\|_{Q_y^{-1}}^2 \quad \text{subject to: } D^T x = 0$$

(به شرط)

می توان ثابت کرد که جواب این بهینه سازی قیددار توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\hat{x} = (A^T Q_y^{-1} A + D D^T)^{-1} A^T Q_y^{-1} y$$

همچنین دقت یا ماتریس کوواریانس جواب نیز محاسبه می گردد:

$$Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A + D D^T)^{-1}$$

با استفاده از این برآورد و دقت آن، همانند کمترین مربعات عادی می توان مشاهدات سرشکن شده و بردار باقیمانده ها و ماتریس کوواریانس آن ها را نیز محاسبه نمود.

روابط بالا را با روابط کمترین مربعات عادی مقایسه کنید. تفاوت فقط در اضافه شدن ماتریس  $DD^T$  به ماتریس نرمال است. در حقیقت با اضافه شدن این ماتریس به ماتریس نرمال، کمبود مرتبه ماتریس نرمال رفع می گردد و این ماتریس نرمال جدید معکوس پذیر می گردد.

### خلاصه بحث دیتوم تا اینجا:

(۱) عدم تعریف کامل سیستم مختصات در شبکه باعث ایجاد کمبود مرتبه در ماتریس طرح و ماتریس نرمال می گردد که خود باعث می شود که کمترین مربعات جواب نداشته باشد. این نقص را **نقص دیتوم** شبکه می گویند.

(۲) برای رفع این نقص، باید دیتوم شبکه به صورت معادلات ریاضی فرموله شود و به عنوان **قید دیتوم** به مدل تابعی مسئله (دستگاه معادلات-مشاهدات) اضافه گردد.

(۳) روش حل مسئله با اضافه کردن حداقل قیود لازم برای رفع نقص دیتوم را **روش حداقل قیود** می نامند.

(۴) تعداد نقص دیتوم بستگی به چند بعدی بودن شبکه و همچنین مشاهدات موجود در شبکه دارد که حالت های مختلف آن در جداول مربوطه آورده شد.

(۵) بعد از فرموله کردن قید دیتوم، جواب مسئله (و دقت آن) از طریق روابط زیر محاسبه می گردد:

$$\hat{x} = (A^T Q_y^{-1} A + D D^T)^{-1} A^T Q_y^{-1} y \quad Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A + D D^T)^{-1}$$



### خلاصه بحث دیتوم تا اینجا:

(۱) عدم تعریف کامل سیستم مختصات در شبکه باعث ایجاد **کمبود مرتبه** در ماتریس طرح و ماتریس نرمال می‌گردد که خود باعث می‌شود که کمترین مربعات جواب نداشته باشد. این نقص را **نقص دیتوم** شبکه می‌گویند.

(۲) برای رفع این نقص، باید دیتوم شبکه به صورت معادلات ریاضی فرموله شود و به عنوان **قید دیتوم** به مدل تابعی مسئله (دستگاه معادلات-مشاهدات) اضافه گردد.

(۳) روش حل مسئله با اضافه کردن حداقل قیود لازم برای رفع نقص دیتوم را **روش حداقل قیود** می‌نامند.

(۴) تعداد نقص دیتوم بستگی به چند بعدی بودن شبکه و همچنین مشاهدات موجود در شبکه دارد که حالت‌های مختلف آن در جداول مربوطه آورده شد.

(۵) بعد از فرموله کردن قید دیتوم، جواب مسئله (و دقت آن) از طریق روابط زیر محاسبه می‌گردد:

### ادامه بحث دیتوم در جلسه بعدی:

روش خاصی از حداقل قیود وجود دارد به نام قیود داخلی. این قیود با استفاده از خصوصیات ریاضی ماتریس طرح و فضای پوچی آن فرموله می‌شوند.  
در جلسه آینده به مبحث **قیود داخلی** خواهیم پرداخت.